



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

07F

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز - ۱۴۰۰/۰۳/۶

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراح سؤال	ویراستاران
سیروس نصیری	میلاد حسینی نامی
	ارسلان حسونند
	مهدی حاجی نژادیان



۱- اگر $f(x) = (a^2 - 4)x^3 + ax^2 - 1$ چند جمله‌ای از درجه دوم و $g(x) = (a^2 + a - 6)x^5 + ax^4 - 1$ چند جمله‌ای از درجه پنجم باشد، $g(1)$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

-۶ (۲)

-۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

تابع $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + ax + a$ ، یک تابع چند جمله‌ای از درجه n ام است. تابع f درجه دوم و تابع g درجه پنجم است، پس باید:

$$\begin{cases} a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2 \\ a^2 + a - 6 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2, -3 \end{cases} \quad \cap \rightarrow a = -2$$

بازای $a = -2$ تابع f درجه دوم و تابع g درجه پنجم می‌شود.

$$g(x) = -4x^5 - 2x^4 - 1 \Rightarrow g(1) = -7$$

۲- تابع $f(x) = (a-1)\log_3(ax)$ یک تابع نزولی اکید است، حدود a کدام است؟

$a < 0$ (۴)

$0 < a < 1$ (۳)

$a > 0$ (۲)

$0 < a < 4$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر تابع $f(x)$ صعودی اکید باشد، آن‌گاه برای تابع $af(bx)$ حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

(الف) در صورتی که $ab > 0$ باشد، صعودی اکید است.

(ب) در صورتی که $ab < 0$ باشد، نزولی اکید است.

تابع $y = \log_3 x$ یک تابع صعودی اکید است، برای آن که $f(x) = (a-1)\log_3 ax$ نزولی اکید باشد، بایستی a و $a-1$ مختلف علامت باشند.

$$a(a-1) < 0 \Rightarrow 0 < a < 1$$

۳- اگر $f(x) = \sqrt{3x+1}$ ، $fog(x) = \frac{x}{2x-1}$ باشد، $(gof)(1)$ کدام است؟

$-\frac{27}{5}$ (۴)

$\frac{27}{5}$ (۳)

$-\frac{5}{27}$ (۲)

$\frac{5}{27}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

$$f(g(x)) = \frac{x}{2x-1} \Rightarrow \sqrt{3g(x)+1} = \frac{x}{2x-1} \Rightarrow 3g(x)+1 = \frac{x^2}{(2x-1)^2} \Rightarrow 3g(x) = \frac{x^2}{(2x-1)^2} - 1$$

$$\Rightarrow 3g(x) = \frac{x^2 - 4x^2 + 4x - 1}{(2x-1)^2} \Rightarrow g(x) = \frac{-3x^2 + 4x - 1}{3(2x-1)^2}$$

$$f(1) = 2, \quad g(f(1)) = g(2) = \frac{-12 + 8 - 1}{3 \times 9} = -\frac{5}{27}$$

روش دوم:

$$gof(1) = g(2)$$

$$\Rightarrow fog(2) = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{3g(2)+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow g(2) = -\frac{5}{27}$$



۴- اگر $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ و $D_f = [1, 2)$ باشد، D_{fog} کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(\frac{9}{8}, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۴

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_g: \frac{x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$$

$$g(x) \in D_f \Rightarrow 1 \leq \sqrt{\frac{x}{x-1}} < 2 \xrightarrow{\text{توان دو}} 1 \leq \frac{x}{x-1} < 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x-1} < 4 \Rightarrow \frac{4-x}{x-1} < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (\frac{4}{3}, +\infty) \\ \frac{x}{x-1} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \geq 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x > \frac{9}{8}$$

$$D_{fog} = \{x \leq 0 \text{ یا } x > 1 \mid x > \frac{9}{8}\} = (\frac{9}{8}, +\infty)$$

۵- اگر $x > 0$ ، $f(x) = 2x - \frac{1}{3x}$ باشد، $f^{-1}(1-x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3+3x+\sqrt{9x^2+8x+33}}{6}$ (۲) $\frac{3-3x+\sqrt{9x^2-18x+33}}{6}$
(۳) $\frac{3+3x+\sqrt{9x^2+18x+33}}{12}$ (۴) $\frac{3-3x+\sqrt{9x^2-18x+33}}{12}$

پاسخ: گزینه ۴

برای محاسبه تابع وارون، x را بر حسب y بدست آورده، سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y = 2x - \frac{1}{3x} \xrightarrow{\times(3x)} 3xy = 6x^2 - 1 \Rightarrow 6x^2 - 3xy - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3y \pm \sqrt{9y^2 + 24}}{12}$$

با توجه به فرض سوال که $x > 0$ است، مقادیر y نیز مثبت خواهد بود، پس:

$$f^{-1}(x) = \frac{3x + \sqrt{9x^2 + 24}}{12} \Rightarrow f^{-1}(1-x) = \frac{3-3x + \sqrt{9(1-x)^2 + 24}}{12} \Rightarrow f^{-1}(1-x) = \frac{3-3x + \sqrt{9x^2 - 18x + 33}}{12}$$

۶- تابع $y = x - |4x - 8|$ در یک بازه صعودی اکید است، وارون تابع در آن بازه کدام است؟

- (۱) $\frac{x-8}{5}; x \leq 2$ (۲) $\frac{x-8}{5}; x \leq -1/2$ (۳) $\frac{x+8}{5}; x \leq 2$ (۴) $\frac{x+8}{5}; x \leq 18$

پاسخ: گزینه ۳

گاهی اوقات با محدود کردن بازه، تابع یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر می‌سازیم. در این سوال تابع در فاصله $(-\infty, 2]$ صعودی اکید خواهد بود، ببینید:

$$x \leq 2 \Rightarrow y = x - (-4x + 8) = 5x - 8 \Rightarrow x = \frac{y+8}{5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+8}{5}$$

دقت کنید که دامنه f^{-1} برابر برد f است. در این تابع که صعودی اکید است:

$$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, f(2)] = (-\infty, 2]$$



۷- اگر ماکزیمم و دوره تناوب تابع $y = a - (2a^2 - 4) \sin \frac{\pi x}{3}$ با هم برابر باشند، کمترین مقدار تابع کدام می‌تواند باشد؟
 (۱) ۲ (۲) ۱۱ (۳) -۱۱ (۴) -۳

پاسخ: گزینه ۳

نکته: در تابع $y = a + b \sin cx$ سه رابطه مهم زیر برقرار است:

$$\begin{cases} \max f(x) = a + |b| \\ \min f(x) = a - |b| \\ T = \frac{2\pi}{|c|} \end{cases}$$

در این سوال دوره تناوب برابر $\frac{2\pi}{3}$ یعنی برابر ۶ است.

$$\max = T \Rightarrow a + |2a^2 - 4| = 6 \Rightarrow |2a^2 - 4| = 6 - a \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 - 4 = 6 - a \Rightarrow 2a^2 + a - 10 = 0 \Rightarrow a = 2, -\frac{5}{2} \\ 2a^2 - 4 = a - 6 \Rightarrow 2a^2 - a + 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشه حقیقی} \end{cases}$$

$$a = 2 \Rightarrow y = 2 - 4 \sin \frac{\pi x}{3} \Rightarrow \min f(x) = 2 - 4 = -2$$

$$a = -\frac{5}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{2} - \left(-\frac{5}{2} - 4\right) \sin \frac{\pi x}{3} = -\frac{5}{2} - \frac{17}{2} \sin \frac{\pi x}{3} \Rightarrow \min f(x) = -\frac{5}{2} - \frac{17}{2} = -11$$

۸- دامنه تابع $f(x) = \tan \frac{\pi}{x+1}$ کدام است؟

$$\{x | x \neq \frac{1+2k}{1-2k}, k \in \mathbb{Z}\} \quad (2)$$

$$\{x | x \neq \frac{1-2k}{1+2k}, k \in \mathbb{Z}\} \quad (1)$$

$$\{x | x \neq \frac{1}{1+2k}, k \in \mathbb{Z}\} \quad (4)$$

$$\{x | x \neq \frac{1-2k}{1+2k}, k \in \mathbb{Z}\} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

دامنه تابع $f(x) = \tan x$ مجموعه $\{x | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ است، در این سوال داریم:

$$\frac{\pi}{x+1} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div \pi} \frac{1}{x+1} \neq \frac{2k+1}{2} \Rightarrow x+1 \neq \frac{2}{2k+1} \Rightarrow x \neq \frac{2}{2k+1} - 1 \Rightarrow x \neq \frac{1-2k}{1+2k}$$

$$D_{f(x)} = \{x | x \neq \frac{1-2k}{1+2k}, k \in \mathbb{Z}\}$$

۹- اگر $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ و $\cos \beta = \frac{-3}{5}$ باشد، حاصل $169 \sin 2\alpha + 25 \cos 2\beta$ کدام است؟ (α و β در ناحیه دوم هستند).

$$-129 \quad (4)$$

$$-127 \quad (3)$$

$$129 \quad (2)$$

$$127 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

روابط مورد استفاده در این سوال:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$



$$\sin \alpha = \frac{5}{13} \xrightarrow{\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)} \cos \alpha = \frac{-12}{13}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{5}{13} \times \frac{-12}{13} = \frac{-120}{169}$$

$$\cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = 2 \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = \frac{18}{25} - 1 = \frac{-7}{25}$$

$$169 \sin 2\alpha + 25 \cos 2\beta = -120 - 7 = -127$$

۱۰- معادله $\cos x = \sin x$ دو دسته جواب به صورت‌های $k \in \mathbb{Z}$ ، دارد. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{a}(4k+1) \\ x = \frac{\pi}{b}(4k-1) \end{cases}$ کدام است؟

۲۶ (۴)

۱۲ (۳)

۲۸ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

برای حل معادله کسینوسی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

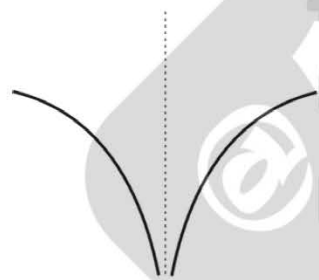
$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

$$\cos x = \sin x \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x = 2m\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x = 2m\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4}(4k+1) \\ x = \frac{\pi}{4}(4k-1) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

با توجه به داده‌های مسئله $a=16$ و $b=12$ و در نتیجه $a+b=28$ خواهد بود.

۱۱- اگر تابع $f(x) = \frac{[x]}{2x^2 - (b+1)x + 6}$ در همسایگی $x=a$ به صورت مقابل باشد، b کدام است؟ ($a < 0$)



- ۴√۳ - ۱ (۱)
- ۴√۳ - ۱ (۲)
- ۴√۳ + ۱ (۳)
- ۴√۳ + ۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

خواهد بود. در این صورت بایستی مخرج

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ شود، آن‌گاه نمودار f در همسایگی $x=a$ به صورت

ریشه مضاعف $x=a$ داشته باشد، پس $2x^2 - (b+1)x + 6$ معادل $2(x-a)^2$ می‌باشد.



$$2(x-a)^2 = 2x^2 - 4ax + 2a^2$$

با مقایسه:

$$2a^2 = 6 \Rightarrow a^2 = 3 \xrightarrow{a < 0} a = -\sqrt{3}$$

$$-4a = -(b+1) \Rightarrow b = 4a - 1 = -4\sqrt{3} - 1$$

۱۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{[-3x]}{1-2\cos x}$ کدام است؟

(۴) $-\infty$

(۳) $+\infty$

(۲) یک

(۱) صفر

پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر در تابع کسری $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حد مخرج صفر و حد صورت در $X=a$ عددی غیرصفر شود، در این صورت حاصل حد $+\infty$ یا $-\infty$ خواهد شد و چهار حالت زیر رخ می‌دهد.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{cases} \frac{m > 0}{+} = +\infty \\ \frac{m > 0}{-} = -\infty \\ \frac{m < 0}{+} = -\infty \\ \frac{m < 0}{-} = +\infty \end{cases}$$

توجه داشته باشید که اگر مخرج صفر مطلق شود، آن‌گاه حد تعریف نشده است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{[-3x]}{1-2\cos x} = \frac{[-\pi]}{1-2(\frac{1}{2})^+} = \frac{-4}{1-1^+} = \frac{-4}{-} = +\infty$$

۱۳- در صورتی که $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + b\sqrt{x}}{x(ax+1)^2 - 1} = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+a)^3 - x^3}{(x+a)^2 + x^2}$ کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۵/۵

(۱) ۴/۵

پاسخ: گزینه ۱

در توابع گویا به فرم $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$ حاصل حد با انتخاب پرتوان‌های صورت و مخرج و به مقایسه درجه‌های صورت و مخرج بستگی دارد.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{a'x^m} = \begin{cases} -\infty \text{ یا } +\infty & n > m \\ \cdot & n < m \\ \frac{a}{a'} & n = m \end{cases}$$



در این سوال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + b\sqrt{x}}{x(ax+1)^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3}{a^3 x^3} = \frac{1}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+a)^3 - x^3}{(x+a)^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 a + \dots}{2x^2 + \dots} = \frac{3a}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - |x^2 - x^3|}{2x^2 + x^3}$ کدام است؟

(۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) صفر (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

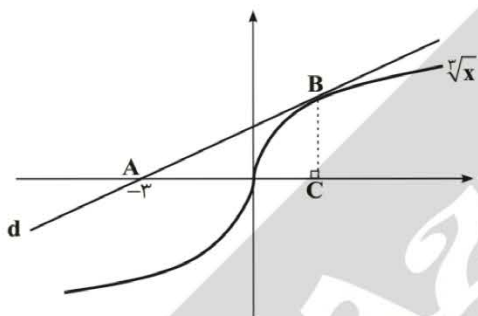
دقت کنید که تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق به صورت زیر است:

x	$-\infty$	.	۱	$+\infty$
$x^2 - x^3$	+	.	+	-

و زمانی که $x \rightarrow -\infty$ عبارت داخل قدرمطلق مثبت است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - |x^2 - x^3|}{2x^2 + x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - (x^2 - x^3)}{2x^2 + x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

۱۵- خط d در نقطه B بر تابع $y = \sqrt[3]{x}$ مماس است، مساحت مثلث ABC چقدر است؟



- (۱) $\frac{4}{9} \sqrt{\frac{3}{2}}$
 (۲) $\frac{9}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$
 (۳) $\frac{9}{4} \sqrt{\frac{3}{2}}$
 (۴) $\frac{2}{9} \sqrt{\frac{3}{2}}$

پاسخ: گزینه ۳

شیب خط مماس بر تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ در نقطه‌ای به طول a برابر $f'(a)$ است. ضمناً مشتق مرتبط با این سوال به صورت زیر است:

$$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

در این سوال خط d بر تابع مماس است و همچنین از نقاط A و B عبور کرده است. فرض می‌کنیم که طول نقطه B برابر α باشد، در این صورت مختصات نقطه B به صورت $B(\alpha, \sqrt[3]{\alpha})$ خواهد بود.

$$m_d = f'(\alpha) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{\alpha^2}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\alpha + 3} \Rightarrow \alpha + 3 = 3\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{9}{4} \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

۱۶- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{f(x) - 4} = -2$ باشد، مشتق تابع $y = xf(x^2 + x)$ در $x = 1$ چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱



پاسخ: گزینه ۱

تعریف مشتق: مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول a برابر $f'(a)$ و برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ضمناً روابط مشتق‌گیری زیر را در این مسئله استفاده خواهیم کرد.

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

$$y = u \times v \Rightarrow y' = u'v + v'u$$

فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2} = A$ باشد، در این صورت داریم:

$$A + \frac{1}{A} = -2 \Rightarrow A = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2} = -1$$

از حد بالا متوجه می‌شویم که $f(2) = 4$ و $f'(2) = -1$ است.

$$y = xf(x^2 + x) \Rightarrow y' = f(x^2 + x) + (2x + 1)xf'(x^2 + x) \xrightarrow{x=1} y'(1) = f(2) + 3f'(2) = 4 + 3(-1) = 1$$

۱۷- در تابع $y = -3x^3 + 9x^2 - x - 1$ ، بیشترین آهنگ لحظه‌ای در نقطه A رخ می‌دهد، عرض نقطه A کدام است؟

۳ (۴)

۱ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x)$ در $x=a$ برابر $f'(a)$ است. در این سوال باید مشتق ماکزیمم شود.

$$y' = -9x^2 + 18x - 1$$

تابع y' یک تابع درجه دوم است، ماکزیمم آن در رأس رخ می‌دهد.

$$x_s = \frac{-18}{2(-9)} = 1$$

عرض نقطه A برابر است با:

$$f(1) = -3 + 9 - 1 - 1 = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & x < 0 \\ \sqrt[3]{x^2 - 4} & 0 \leq x < 4 \\ x+3 & x \geq 4 \end{cases}$$

۱۸- تابع $f(x)$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۲ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

موارد عدم وجود مشتق:

۱- اگر f در a ناپیوسته باشد.

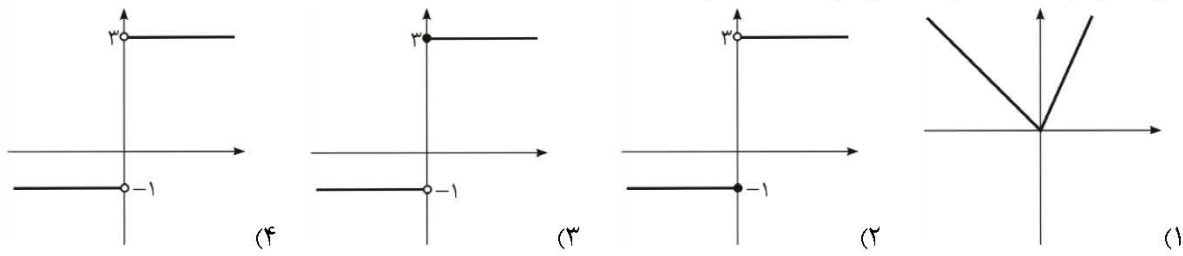
۲- اگر مشتق چپ و راست تابع پیوسته f با هم نابرابر باشند، مانند تابع $|f(x)|$ در ریشه‌های ساده معادله $f(x) = 0$ مشتق‌ناپذیر است.

۳- اگر مشتق چپ یا راست یا هر دو بی‌نهایت شود، مانند تابع $\sqrt[p]{p(x)}$ در ریشه‌های ساده و مضاعف معادله $p(x) = 0$. $p(x)$ چند جمله‌ای است.

در این سوال تابع در $x=0$ و $x=4$ ناپیوسته است و همچنین در $x=-1$ نقطه شکستگی (گوشه‌ای) دارد. ضمناً در $x=2$ مشتق بی‌نهایت می‌شود، پس مجموعاً تابع در نقاط $\{-1, 2, 4, 0\}$ مشتق ندارد.



۱۹- اگر $f(x) = 2|x| + x$ باشد، نمودار $f'(x)$ کدام است؟



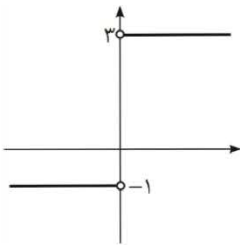
پاسخ: گزینه ۴

تابع $f(x) = 2|x| + x$ در نقطه $x = 0$ مشتق ندارد (نقطه گوشه‌ای). در سایر نقاط داریم:

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = -x \Rightarrow f'(x) = -1$$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = 3$$

نمودار f' به صورت زیر خواهد بود.



۲۰- در کدام بازه هر دو تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ و $g(x) = x^2 - 6x + a$ صعودی اکید هستند؟

- (۱) $x \leq 3$ (۲) $x \leq 2$ (۳) $x \geq 3$ (۴) $x \geq 2$

پاسخ: گزینه ۳

در هر بازه که $f' > 0$ باشد، تابع f صعودی اکید و در هر بازه که $f' < 0$ باشد، f نزولی اکید است.

دقت کنید که اگر ریشه‌های معادله $f' = 0$ قابل شمارش باشد، خلی در یکنوایی اکید ایجاد نمی‌شود. پس در چند جمله‌ای‌های (غیر ثابت) برای صعودی اکید بودن $f' \geq 0$ و برای نزولی اکید بودن $f' \leq 0$ را حل می‌کنیم.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x \geq 0 \Rightarrow 3x(x - 2) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \quad (1)$$

$$g(x) = x^2 - 6x + a \Rightarrow g'(x) = 2x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow x \geq 3$$

۲۱- بیشترین مقدار تابع $f(x) = x(3\sqrt[3]{x} - 8)$ در فاصله $[0, 27]$ چقدر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۲۷ (۳) -۲۷ (۴) -۸

پاسخ: گزینه ۲

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد، آن گاه تابع بیشترین و کمترین مقدار در نقاط بحرانی رخ می‌دهد. دقت کنید که نقاط ابتدا و انتهای دامنه نیز بحرانی‌اند.

$$f(x) = 3x\sqrt[3]{x} - 8x \Rightarrow f'(x) = 3\left(\sqrt[3]{x} + \frac{x}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) - 8$$

$$f'(x) = \frac{4x}{\sqrt[3]{x^2}} - 8 = 4(\sqrt[3]{x} - 2) = 0 \Rightarrow x = 8$$



نقاط بحرانی $\{0, 8, 27\}$ می‌باشند. حال مقادیر نقاط بحرانی را حساب می‌کنیم.

$$f(0) = 0, f(8) = 8(6-8) = -16, f(27) = 27(9-8) = 27$$

پس بیشترین مقدار تابع ۲۷ است.

۲۲- اگر $f(x) = 4x - \frac{A}{2x}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+2h) - f'(1)}{h} = 4$ باشد، $f'(1)$ چقدر است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

طبق تعریف مشتق دوم: $f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$ و همچنین اگر f در a مشتق دوم داشته باشد:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+bh) - f'(a+ch)}{dh} = \frac{b-c}{d} f''(a)$$

طبق اطلاعات مسئله $2f''(1) = 4$ است.

$$f(x) = 4x - \frac{A}{2x} \Rightarrow f'(x) = 4 + \frac{A}{2x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-A}{x^3} \Rightarrow f''(1) = -A$$

$$2f''(1) = 4 \Rightarrow -2A = 4 \Rightarrow A = -2 \Rightarrow f'(1) = 4 + \frac{A}{2} = 4 - 1 = 3$$

۲۳- نقطه $A(-1, 2)$ نقطه بحرانی تابع $f(x) = x^4 + ax + b$ است، شیب خط مماس بر f در نقطه‌ای به طول $b-a$ چقدر است؟

(۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۸ (۴) ۷

پاسخ: گزینه ۳

در توابع چند جمله‌ای نقطه بحرانی ریشه مشتق اول است.

چون نقطه $A(-1, 2)$ ، نقطه بحرانی تابع چند جمله‌ای $f(x) = x^4 + ax + b$ است، پس:

$$f'(x) = 4x^3 + a$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 4(-1)^3 + a = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$f(-1) = 2 \Rightarrow 2 = 1 - 4 + b \Rightarrow b = 5$$

$$f'(b-a) = f'(1) = 4 + 4 = 8$$

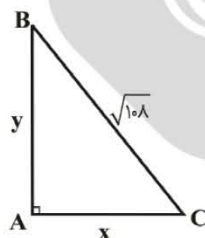
۲۴- مثلث مقابل را حول ضلع AB دوران می‌دهیم، حجم ماکزیمم شکل حاصل چقدر است؟

(۱) 128π

(۲) 144π

(۳) 148π

(۴) 108π



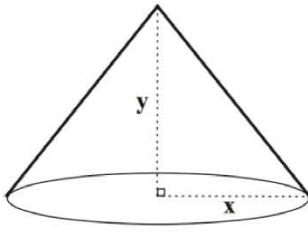
پاسخ: گزینه ۲

بین اضلاع مثلث رابطه فیثاغورس برقرار است.

$$x^2 + y^2 = 108 \Rightarrow x^2 = 108 - y^2$$



پس از دوران با یک مخروط سروکار داریم:



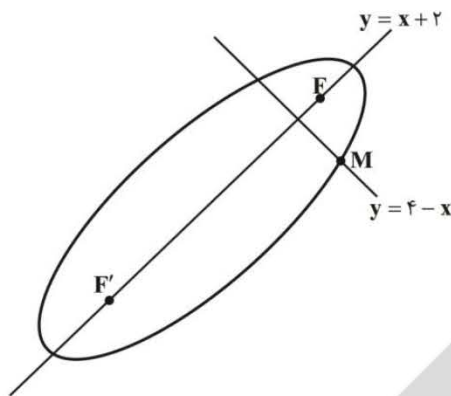
$$V = \frac{\pi}{3} x^2 y = \frac{\pi}{3} y(1.8 - y^2)$$

$$V(y) = \frac{\pi}{3} (1.8y - y^3)$$

$$V'(y) = \frac{\pi}{3} (1.8 - 3y^2) = 0 \Rightarrow 3y^2 = 1.8 \Rightarrow y^2 = 0.6 \Rightarrow y = \sqrt{0.6}$$

$$V_{\max} = \frac{\pi}{3} \times 0.6(1.8 - 0.6) = 0.2\pi$$

۲۵- در بیضی شکل زیر، اگر طول کانون‌های F و F' به ترتیب برابر ۲ و ۰، و طول نقطه M برابر ۳ باشد، اندازه قطر کوچک بیضی چقدر است؟



- (۱) $4\sqrt{3}$
- (۲) $2\sqrt{3}$
- (۳) $2\sqrt{2}$
- (۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۴

مختصات کانون‌ها را به کمک خط $y = x + 2$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x=2 \Rightarrow F(2, 4) \\ x=0 \Rightarrow F'(0, 2) \end{cases} \Rightarrow 2c = |FF'| = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow c = 1$$

نقطه M هم به صورت $M(3, 1)$ خواهد بود. مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی تا دو کانون برابر قطر بزرگ بیضی است.

$$2a = |FM| + |F'M| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-4)^2} + \sqrt{(3-0)^2 + (1-2)^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow a = \sqrt{10}$$

بین a, b, c در هر بیضی، رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 10 = b^2 + 1 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$2b = 2 \times 3 = 6 = 4\sqrt{2}$$

۲۶- اگر نقطه $A(1, -1)$ درون و نقطه $B(0, 2)$ بیرون دایره $x^2 + y^2 - 4x - y + m = 0$ قرار گیرد، حدود m کدام است؟

- (۱) $m > 1$ (۲) $m < 1$ (۳) $-2 < m < 1$ (۴) $m > -2$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: نقطه $A(x, y)$ و دایره $f(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ مفروض است.۱- اگر $f(x, y) = 0$ باشد، نقطه A روی دایره قرار دارد.۲- اگر $f(x, y) < 0$ باشد، نقطه A درون دایره قرار دارد.۳- اگر $f(x, y) > 0$ باشد، نقطه A خارج دایره قرار دارد.

در این سوال A درون و B بیرون دایره قرار دارد.

$$\begin{cases} 1+1-4+1+m < 0 \\ 0+4-0-2+m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > -2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} -2 < m < 1$$

۲۷- معادله دایره‌ای به شعاع $\sqrt{5}$ که بر دو خط $y=2x$ و $x=2y$ در ناحیه سوم مماس باشد، کدام است؟

$$x^2 + y^2 - 1 \cdot (x+y) + 45 = 0 \quad (2)$$

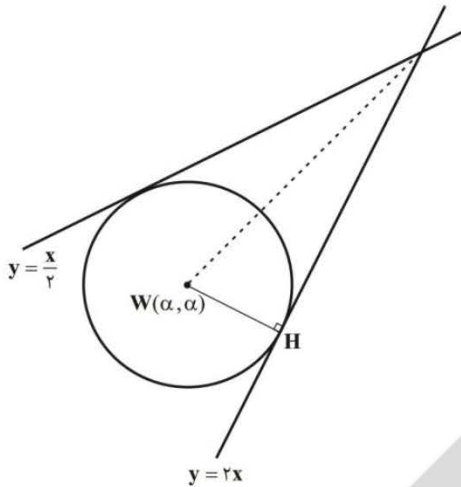
$$x^2 + y^2 + 1 \cdot (x+y) + 40 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + 1 \cdot (x+y) + 35 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 + 1 \cdot (x+y) + 45 = 0 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به شکل زیر مرکز دایره روی نیمساز ربع سوم قرار می‌گیرد. پس می‌توانیم مرکز دایره را $W(\alpha, \alpha)$ در نظر بگیریم. فاصله W از خط مماس برابر شعاع دایره است.

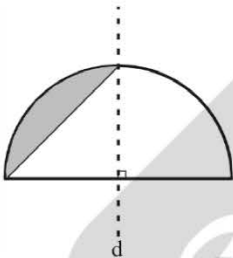


$$r = |WH| = \frac{|\alpha - 2\alpha|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5} \Rightarrow |\alpha| = 5 \xrightarrow{\alpha < 0} \alpha = -5$$

حال معادله دایره‌ای را می‌نویسیم که مرکز آن $(-5, -5)$ و شعاع آن $\sqrt{5}$ باشد.

$$(x+5)^2 + (y+5)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 \cdot (x+y) + 45 = 0$$

۲۸- نیم دایره مقابل را حول خط d دوران می‌دهیم. حجم قسمت هاشورخورده در اثر دوران چقدر است؟ (شعاع دایره که بر خط d منطبق است را r فرض کنید).



$$\frac{\pi}{4} r^3 \quad (2)$$

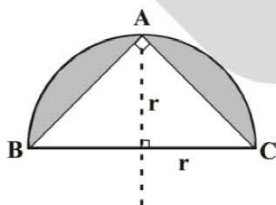
$$\frac{\pi}{3} r^3 \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{6} r^3 \quad (4)$$

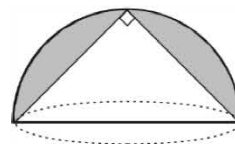
$$\frac{\pi}{12} r^3 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

فضای ایجاد شده تفاضل حجم نیم کره به شعاع r و یک مخروط به شعاع قاعده و ارتفاع r است.



در اثر دوران



$$V_1 = \frac{2}{3} \pi r^3 \quad \text{حجم نیم کره}$$



$$V_2 = \frac{\pi}{3} r^2 \times r = \frac{\pi}{3} r^3$$

$$\text{فضای مطلوب} = V_1 - V_2 = \frac{2\pi}{3} r^3 - \frac{\pi}{3} r^3 = \frac{\pi}{3} r^3$$

۲۹- درون کیسه A پنج مهره وجود دارد که سه تای آنها قرمز و درون کیسه B هشت مهره وجود دارد که چهار تای آنها قرمز است. از کیسه A دو مهره و از کیسه B سه مهره انتخاب و در کیسه C قرار می‌دهیم. سپس از کیسه C یک مهره انتخاب می‌کنیم با چه احتمالی این مهره قرمز است؟

$$\frac{27}{50} \quad (4)$$

$$\frac{29}{50} \quad (3)$$

$$\frac{17}{50} \quad (2)$$

$$\frac{19}{50} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

مهره انتخابی ممکن است از کیسه A بوده و ممکن است از کیسه B باشد.

$$P = P(A \text{ کیسه}) \times P(\text{قرمز بودن} | A \text{ کیسه}) + P(B \text{ کیسه}) \times P(\text{قرمز بودن} | B \text{ کیسه})$$

$$P = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{8} = \frac{6}{25} + \frac{3}{10} = \frac{12+15}{50} = \frac{27}{50}$$

۳۰- در یک دانشگاه ۶۵ درصد دانشجویان دختر و بقیه پسر هستند. در یک ترم ۶۰ درصد دختران و ۷۰ درصد پسران واحدهای خود را پاس کرده‌اند، اگر فرد انتخابی واحدش را پاس کرده باشد، با چه احتمالی پسر است؟

$$\frac{54}{127} \quad (4)$$

$$\frac{52}{127} \quad (3)$$

$$\frac{49}{127} \quad (2)$$

$$\frac{47}{127} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

اگر پیشامد پسر بودن را A و پیشامد پاس کردن را B فرض کنیم، خواسته مسئله $P(A|B)$ است که از رابطه $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ بدست می‌آید.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{35}{100} \times \frac{70}{100}$$

$$P(B) = P(A) \times P(B|A) + P(A') \times P(B|A') = \frac{35}{100} \times \frac{70}{100} + \frac{65}{100} \times \frac{60}{100}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{35 \times 70}{35 \times 70 + 65 \times 60} = \frac{35 \times 7}{35 \times 7 + 65 \times 6} = \frac{5 \times 49}{5(49 + 78)} = \frac{49}{127}$$

